EXERCICE N°1 : 15' 3 points

Soit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \left(z^2 - 4z + 5\right)^2 + \left(z + 1\right)^2$. **1)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Ecrire alors $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

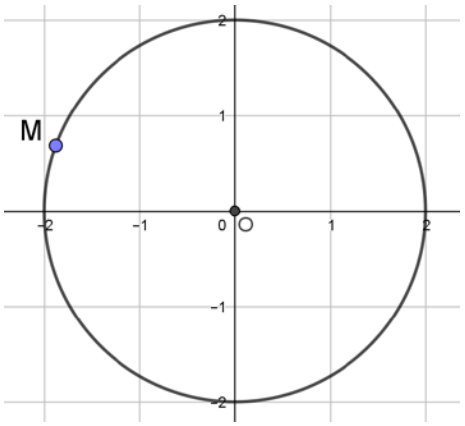
EXERCICE N°2 : 30' 4 points

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(3+i\sqrt{3}\right) z + 2\left(1+i\sqrt{3}\right) = 0$.

b) Donner les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2) On désigne par A, B et B' les points d'affixes respectives 2, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{b}$.

Dans la figure ci-contre, on a placé sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2, le point M d'affixe $z = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi,\pi]$.



a) Recopier la figure et construire les points A, B, B' et le point M' d'affixe $z' = 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

b) Montrer que $z' = \frac{b}{2} z$.

3) On désigne par K et K' les milieux respectifs de [BM] et [B'M'].

a) Vérifier que $z_{K'} = \frac{2\bar{b} + b z}{4}$.

b) Montrer que : $b^2 - 4b = 2\bar{b} - 8$ et que $z_{K'} - 2 = \frac{b}{2}\left(z_K - 2\right)$.

c) En déduire que lorsque M varie sur le cercle $\mathscr{C}$, la médiatrice de [KK'] passe par un point fixe que l'on précisera.

EXERCICE N°3 : 25' 4 points

1) On donne les nombres complexes suivants :

$a = \left(1+\sqrt{3}\right)i$; $b = -\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right]$ et $w = 2+\left(1-\sqrt{3}\right)i$.

a) Donner la forme algébrique de a^2 et w^2.

b) Vérifier que $w^2 = a^2 - 4b$.

2) On considère les équations suivantes : $(E_1): z^2 - az + b = 0$ et $(E_2): z^3 - 2az^2 + \left(b + a^2\right)z - ab = 0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1) (on note z_1 et z_2 les solution de (E_1) tel que $|z_1| < |z_2|$).

b) Vérifier que a est une solution de l'équation (E_2).

c) En déduire les solutions de (E_2).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = -1+i\sqrt{3}$, w et a.

a) Donner sous forme exponentielle z_B puis placer A et B.

b) Vérifier que $z_A - z_B = w$. Construire alors le point C.

c) Donner la forme algébrique de $\frac{w-z_A}{a-z_A}$. En déduire une *A*, *C* et *D* sont alignés.

d) Construire alors le point *D*.

EXERCICE N°4 : 15' 3 points

A/ On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $\frac{1}{4}z^2 - \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}z - i = 0$.

1) Vérifier que : $z_1 = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est une solution de l'équation (E).

2) Déterminer alors l'autre solution z_2 de l'équation (E) puis vérifier que : $z_2 = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

B/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique **2cm**)

Soit A le point d'affixe $z_A = 2+2i$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$.

1) Montrer que : $Z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_k = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{-4}{z}$.

a) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $OM \times OM' = 4$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \pi - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.

3) Soient $z_{H'}$ et $z_{K'}$ les affixes respectives de H' et K' tels que : $z_{H'} = \frac{-4}{z_H}$ et $z_{K'} = \frac{-4}{z_K}$.

a) Montrer que $Z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Construire les points H' et K'. (Justifier).

EXERCICE N°5 : 20' 4 points

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + \alpha z^2 - \overline{\alpha} z - 1 = 0$; $\left(\alpha \in \mathbb{C}^*\right)$.

1) a) Montrer que si z_0, z_1 et z_2 sont les solutions de (E) alors $z_0 . z_1 . z_2 = 1$.

b) Montrer que si z est une solution de (E) alors $\frac{1}{\overline{z}}$ est aussi une solution de (E).

c) En déduire que (E) admet au moins une solution de module 1.

2) On suppose que $|\alpha| = 1$. **a)** Vérifier que $(-\alpha)$ est une solution de (E).

b) Soit θ un argument de α. Déterminer les autres solutions de (E) en fonction de θ.

3) Utiliser ce qui précède pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^3 + \left(1+i\sqrt{3}\right)z^2 - \left(1-i\sqrt{3}\right)z - 2 = 0$.